14. cvičení z PSt — 21. 5. 2026

Testování hypotéz

1. *Udělali jsme statistický test nulové hypotézy H_0. Test vyšel signifikantně, H_0 jsme zamítli a p-hodnota byla $p = 0.01$.*

U každého tvrzení označte, zda z výsledku logicky plyne.

(a) Vyvrátili jsme nulovou hypotézu H_0. ☐ ano ☐ ne

(b) Zjistili jsme, že pravděpodobnost nulové hypotézy je 1 %. ☐ ano ☐ ne

(c) Dokázali jsme alternativní hypotézu. ☐ ano ☐ ne

(d) Zjistili jsme, že pravděpodobnost alternativní hypotézy je 99 %. ☐ ano ☐ ne

(e) Když jsme zamítli H_0, pravděpodobnost, že jsme se rozhodli špatně, je 1 %. ☐ ano ☐ ne

(f) Výsledek je spolehlivý v tom smyslu, že kdybychom experiment mnohokrát opakovali, dostali bychom signifikantní výsledek v 99 % případů. ☐ ano ☐ ne

2*. Máme dvě skupiny měření: $A = (2, 4, 5), B = (1, 3)$. Chceme testovat, zda má skupina A větší střední hodnotu než skupina B pomocí permutačního testu.

(a) Formulujte H_0 a H_1.

(b) Spočtěte pozorovanou statistiku $T_{\text{obs}} = \bar{X}_A - \bar{X}_B$.

(c) Spočtěte distribuci T; rozmyslete si, že není potřeba projít 5! možností, ale jen $\binom{5}{3}$ možností.

(d) Spočtěte přesnou jednostrannou permutační p-hodnotu, tedy podíl relabelování, pro která $T \geq T_{\text{obs}}$.

Intervalové odhady

3. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislá měření z normálního rozdělení $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde směrodatná odchylka σ je známá. Chceme sestrojit interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ.

(a) Jaké rozdělení má výběrový průměr $\bar{X}$?

(b) Jaké rozdělení má veličina

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}?$$

(c) Použijte vztah

$$\Pr(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$$

a odvoďte 95% interval spolehlivosti pro μ.

4. Firma plní balíčky mouky. Hmotnost jednoho balíčku má přibližně normální rozdělení se známou směrodatnou odchylkou $\sigma = 8$ gramů. Zkontrolovali jsme $n = 64$ balíčků a výběrový průměr vyšel $\bar{X} = 502$ g.

(a) Sestrojte 95% interval spolehlivosti pro skutečnou střední hmotnost μ.

(b) Obsahuje tento interval hodnotu 500 g?

(c) Jak by se interval změnil, kdybychom zkontrolovali stokrát více balíčků?

5. Uvažujme znovu interval z předchozího příkladu. Rozmyslete si, které z následujících interpretací jsou správné.

(a) Pravděpodobnost, že skutečná hodnota μ leží v intervalu $[500.04, 503.96]$, je 95 %.

(b) Kdybychom celý postup opakovali mnohokrát, přibližně 95 % takto sestrojených intervalů by obsahovalo skutečnou hodnotu μ.

(c) Interval říká, že přibližně 95 % jednotlivých balíčků má hmotnost mezi 500.04 g a 503.96 g.

(d) Hodnota 500 g není v tomto 95% intervalu, takže data nejsou příliš konzistentní s tvrzením, že $\mu = 500$ g.