# 11. cvičení z PSt — 30. 4. 2026

**MLE a nestrannost**

**1.** Připomeňte si, co je to věrohodnost, estimátor, bias estimátoru.

**2.** Němci vyrábějí tanky s pořadovými čísly $1, \ldots, N$ pro neznámé $N$. Ukořistíme $k$ z nich a vidíme pořadová čísla $X_1, \ldots, X_k$, tj. rovnoměrně náhodnou $k$-prvkovou podmnožinu $\{1, \ldots, N\}$. Nechť $M = \max(X_1, \ldots, X_k)$.

(a) Ukažte, že $P(M = m) = \binom{m-1}{k-1} / \binom{N}{k}$ pro $m \in \{k, \ldots, N\}$.

(b) Připomeňte si, že $M$ je MLE pro $N$ (ukazovali jsme na přednášce).

(c) Spočtěte $\mathbb{E}(M) = \frac{k(N+1)}{k+1}$. Může se hodit hockey-stick identity: $\sum_{m=k}^{N} \binom{m}{k} = \binom{N+1}{k+1}$.

(d) Jak z toho plyne nestranný odhad $\hat{N}_{unbiased} = \frac{k+1}{k} M - 1$?

**(Pozor: na přednášce bylo místo $-1$ napsáno $-\frac{k+1}{k}$ — to byla chyba.)**

**3.** Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, 1)$ – data na vstupu $x_1, ..., x_n$ tedy pochází z normální distribuce s neznámým středem $\mu$, ale známou směrodatnou odchylkou 1.

(a) Napište věrohodnostní (likelihood) funkci $p_\theta(x)$; později se může hodit pracovat s funkcí $\log p_\theta(x)$, které se říká log-likelihood.

(b) Derivací spočtěte $\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}}$, mělo by vyjít $\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

(c) Ověřte, že $\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}}$ je nestranný.

(d) Přesvědčte se, že kdyby směrodatná odchylka nebyla 1, ale byl to jakýkoliv (nám známý) parametr $\sigma^2$, $\hat{\mu}_{\mathrm{MLE}}$ by vyšlo úplně stejně; volba $\sigma^2 = 1$ jen zjednodušuje algebru.

**4.** Najděte příklad nějakého nestranného estimátoru (třeba pro problémy z předchozích úloh), který je zjevně hodně špatný.