9. cvičení z PSt — 16. 4. 2026

- **Markovova nerovnost:** $P(X \geq a\mathbb{E}(X)) \leq \frac{1}{a}$ pro $X \geq 0$.
- **Čebyševova nerovnost:** $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t\sigma_X) \leq \frac{1}{t^2}$.

1. Čebyševova nerovnost byla na přednášce v jiném znění: $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \mathrm{var}(X)/a^2$. Rozmyslete si, že znění nahoře je ekvivalentní.

2. Házíme kostkou, za 1 a 2 dostaneme bod. Označme X počet bodů, které dostaneme po n (nezávislých) hodech. Odhadněte pravděpodobnost, že $X \geq n/2$.

(a) Pomocí Markovovy nerovnosti.
(b) Pomocí Čebyševovy nerovnosti.
(c) Pro konkrétní n, jak lze tuto hodnotu určit přesně?

3. Statistik chce odhadnout průměrnou výšku h (v metrech) lidí v nějaké populaci, pomocí n nezávislých vzorků X_1, ..., X_n, které vybíráme uniformně náhodně se všech možných lidí. Pro odhad použije výběrový průměr $\overline{X}_n = (X_1 + \cdots + X_n)/n$. Odhaduje, že směrodatná odchylka jednoho výběru je nejvýše 1 metr.

(a) Jak velké n má volit, aby směrodatná odchylka $\overline{X}_n$ byla nejvýše 1 cm?

(b) Pro jaké n zajistí Čebyševova nerovnost, že $\overline{X}_n$ se liší od h nejvýše o 5 cm s pravděpodobností alespoň 99 %? (Neboli $P(|\overline{X}_n - h| \leq 5) \geq 0.99$.)

(c) Statistik si všimne, že všichni měření lidé mají výšku v intervalu $(1.4, 2.1)$. Jak má upravit odhad směrodatné odchylky? Jak se změní odpovědi na předchozí otázky?