7. cvičení z PSt — 2. 4. 2026

Náhodné vektory

- $p_{X,Y}(x,y) := P(X = x \,\&\, Y = y)$
- $p_{X|Y}(x|y) := P(X = x \mid Y = y)$
- $p_X(x) = \sum_{y \in \operatorname{Im} Y} p_{X,Y}(x,y)$

1. V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.
(a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.
(b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$?

x \ y	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

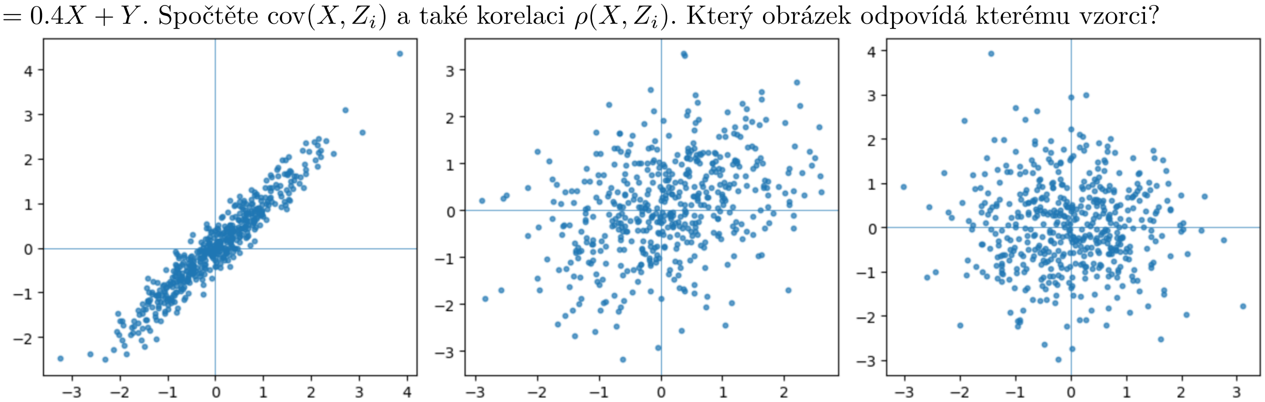
2. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, …, 4).
(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_1 = \max(X,Y)$?
(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_2 = X + Y$?
(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_3 = XY$? *(Hint dole)*[1]
(d) Je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Spočtěte obojí podle definice.
(e*) Je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtěte obojí podle definice.

3. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, k$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i. (a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. X_1, …, X_k. (Bylo na přednášce!)
(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?
(c) V téhle části je $k = 3$, $n = 10$, $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Určete $p_{X_1|X_3}(4|4)$.

Kovariance a korelace

- $\operatorname{cov}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \overset{\text{věta}}{=} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var}(X)$
- $\operatorname{cov}(X,Y)$ je lineární v obou složkách, tj. např. $\operatorname{cov}(X, a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1 \operatorname{cov}(X,Y_1) + a_2 \operatorname{cov}(X,Y_2)$

4. Nezávislé náhodné veličiny X, Y mají střední hodnotu 0 a rozptyl 1. Položíme $Z_0 = Y$, $Z_1 = X + 0.3Y$ a $Z_2 = 0.4X + Y$. Spočtěte $\operatorname{cov}(X, Z_i)$ a také korelaci $\rho(X, Z_i)$. Který obrázek odpovídá kterému vzorci?



[1] Jakých hodnot nabývá vektor (X,Y), pokud $\max(X,Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?

Distribuční funkce

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

5. Pro n.v. X s distribuční funkcí F_X vyjádřete
(a) $P(X \in (0,1])$ (b) $P(X > 0)$ (c*) $P(X < 0)$ (d*) $P(X \in [0,1])$

6. Nechť X splňuje $P(X = x) = 0$ pro každé x. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin
(a) $-X$. (b) $X^+ = \max(0, X)$, (c) $|X|$.

Exponenciální rozdělní

Říkáme, že X má exponenciální rozdělení, $X \sim Exp(\lambda)$, pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{pro } x \geq 0, \text{ jinak } 0.$$

Z přednášky víte, že $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

7. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením.[2]
(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

8. Sledujeme noční oblohu a vyhlížíme meteory. Pro dnešní noc víme, že pravděpodobnost spatření meteoru během časového úseku dt je (pro malá dt) rovna $c \cdot dt$, situace v disjunktních časových intervalech považujeme za nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že během doby t nic neuvidíme? [Klidně předpokládejte, že t/dt je celé číslo. Taky zkuste napsat $dt = 1/n$ a vzpomenout si na limity z analýzy.]

Bonus

9. Říkáme, že náhodná veličina X (resp. její rozdělení) *nemá paměť*, pokud

$$P(X > s + t \mid X \geq s) = P(X > t)$$

pro $s, t \geq 0$. Jinými slovy, doba, kterou jsme již čekali, nemá vliv na dobu, kterou budeme ještě čekat. Už jsme viděli, že geometrické rozdělení nemá paměť. Ukažte, že ani exponenciální rozdělení nemá paměť. Platí dokonce, že je to jediné spojité rozdělení na kladných číslech bez paměti (a geometrické je jediné diskrétní bez paměti), ale to dokazovat nemusíte.

10. Nechť $X_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$ pro $i = 1, \ldots, n$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Ukažte, že $M \sim \text{Exp}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

K procvičení

11. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $Exp(\lambda)$.
(a) Jaké je λ?
(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
(d) Kolik procent atomů se rozpadne do 50 let? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

12. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).
(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?

[2] To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.