6. cvičení z PSt — 26. 3. 2026

Podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \sum_{x \in \mathrm{Im}(X)} x \cdot P(X = x \mid B)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i P(B_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid B_i) \qquad B_1, B_2, \dots \text{ je rozklad } \Omega$$

1. V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností q jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech (a), (b) stejné?

2. Házíme běžnou kostkou, při šestce házíme znovu, i opakovaně. Součet všech hozených čísel označme X. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

3. Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností p zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

Rozptyl

Definice 1. *Rozptyl* náhodné veličiny X je

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Dále definujeme *směrodatnou odchylku* $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$ a *variační koeficient* $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$).

Věta 2. *Platí následující vztahy:*

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \, \mathrm{var}(X)$$

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) \qquad \textit{(pokud } X \perp Y\textit{)}$$

4. Spočtete přímo z definice rozptyl $\mathrm{Uni}(a, b)$ – stačí pro $a = -2$, $b = 2$.

5. Buď $X \sim \mathrm{Geo}(0.1)$ a $Y \sim \mathrm{Geo}(0.01)$. Zvolte konstantu c tak, aby veličiny X a $Z = cY$ měly stejnou střední hodnotu. Porovnejte rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient pro X, Y, Z.

Náhodné vektory

Připomeňte si následující vztahy z přednášky:

$$p_{X,Y}(x,y) := P(X = x \,\&\, Y = y) \qquad \text{(sdružená pravděpodobnostní funkce)}$$

$$p_{X|Y}(x \mid y) := P(X = x \mid Y = y) \qquad \text{(podmíněná pravděpodobnostní funkce)}$$

$$p_X(x) = \sum_{y \in \mathrm{Im}(Y)} p_{X,Y}(x,y) \qquad \text{(marginalizace)}$$

6. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly $1, \dots, 4$).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_1 = \max(X,Y)$?
(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_2 = X + Y$?
(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_3 = XY$? *(Hint dole)*[1]
(d) Je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$?
(e) Je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtěte obojí podle definice.

7. Nezávislé náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \dots, p_n$. Jaké je rozdělení náhodné veličiny $M = \min(X_1, \dots, X_n)$?

8. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, k$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

(a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro náhodné veličiny $X_1, \dots, X_k$. (Bylo na přednášce!)
(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých náhodných veličin X_i?
(c) Pokud $k = 3$, $n = 10$ a $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$, určete $p_{X_1|X_3}(4 \mid 4)$.

9. V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

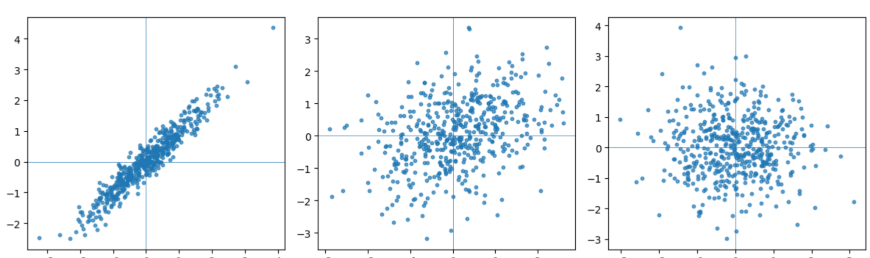
x \ y	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

(a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.
(b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$?
(c) Popište rozdělení $X + Y$ – tj. nalezněte pravděpodobnostní funkci n.v. $X+Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(X+Y)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.
(d) Popište rozdělení $X \cdot Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(XY)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Kovariance a korelace

- $\mathrm{cov}(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \overset{\text{věta}}{=} \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- $\mathrm{cov}(X,X) = \mathrm{var}(X)$
- $\mathrm{cov}(X,Y)$ je lineární v obou složkách, tj. např. $\mathrm{cov}(X, a_1Y_1 + a_2Y_2) = a_1 \mathrm{cov}(X,Y_1) + a_2 \mathrm{cov}(X,Y_2)$

10. Nezávislé náhodné veličiny X, Y mají střední hodnotu 0 a rozptyl 1. Položíme $Z_0 = Y$, $Z_1 = X + 0.3Y$ a $Z_2 = 0.4X + Y$. Spočtěte $\mathrm{cov}(X, Z_i)$ a také korelaci $\rho(X, Z_i)$. Který obrázek odpovídá kterému vzorci?



[1] Jakých hodnot nabývá vektor (X,Y), pokud $\max(X,Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?

Distribuční funkce

Připomeňte si, že distribuční funkce F_X je definována vztahem

$$F_X(x) = P(X \le x).$$

11. Pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F_X vyjádřete
(a) $P(X \in (0,1])$ (b) $P(X > 0)$ (c*) $P(X < 0)$ (d*) $P(X \in [0,1])$

12. Nechť X splňuje $P(X = x) = 0$ pro každé x. Vyjádřete pomocí F_X distribuční funkci náhodných veličin
(a) $-X$. (b) $X^+ = \max(0, X)$, (c) $|X|$.

Exponenciální rozdělní

Říkáme, že X má exponenciální rozdělení, $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, pokud

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad \text{pro } x \ge 0\text{, jinak } 0.$$

Na přednášce si ukážeme, že $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$.

13. Střední doba života harddisku je 4 roky. Přepokládejme, že tato doba je popsána náhodnou veličinou s exponenciálním rozdělením. (To není realistický předpoklad, viz např. `https://www.backblaze.com/blog/how-long-do-disk-drives-last/`.)
(a) Jaká je pravděpodobnost, že disk selže během prvních tří let?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že vydrží alespoň 10 let?
(c) Po jaké době se rozbije 10 % disků?

14. Sledujeme noční oblohu a vyhlížíme meteory. Pro dnešní noc víme, že pravděpodobnost spatření meteoru během časového úseku dt je (pro malá dt) rovna $c \cdot dt$, situace v disjunktních časových intervalech považujeme za nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že během doby t nic neuvidíme? [Klidně předpokládejte, že t/dt je celé číslo. Taky zkuste napsat $dt = 1/n$ a vzpomenout si na limity z analýzy.]

Bonus

15. Nechť $X \sim \mathrm{Bin}(m, p)$, $Y \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, veličiny jsou nezávislé. Napřed si ujasněte, že $X + Y$ má rozdělení $\mathrm{Bin}(m+n, p)$ (kvůli „pohádce“ o významu binomického rozdělení). Pak to ověřte pomocí konvolučního vzorce a sečtení sumy.

K procvičení

16. Nechť F_X je dána předpisem $F_X(x) = x/3$ pro $x \in [0,3]$, $F_X(x) = 0$ pro $x < 0$ a $F_X(x) = 1$ pro $x > 3$. Nechť $Y = 1/X$ a $Z = X^2$. Spočtěte
(a) $P(1 \le X \le 2)$ (b) $P(X \le Y)$ (c) $P(X \le Z)$ (d) hustotu f_X. (e) dist. F_Y, F_Z.

17. Plutonium-238 má poločas rozpadu 87.7 let. Jeho rozpad budeme modelovat pomocí exponenciálního rozdělení: pro každý atom budeme čas, za který se rozpadne, považovat za nezávislou náhodnou veličinu s rozdělením $\mathbb{E}(\lambda)$.
(a) Jaké je λ?
(b) Jaká je střední doba života atomu plutonia-238?
(c) Po jaké době se rozpadne 90 % atomů?
(d) Kolik procent atomů se rozpadne do 50 let? (Některé kardiostimulátory používají plutonium-238 jako zdroj energie. `https://en.wikipedia.org/wiki/Plutonium-238#Nuclear_powered_pacemakers`)

18. Doba, za kterou uvidíme meteor, je exponenciálně rozdělená se střední hodnotou 1 (minuta).
(a) Jaká je pravděpodobnost, že budeme muset čekat více než 5 minut?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že se dočkáme za nejvýše jednu minutu?
(c*) Jaké je rozdělení času, kdy uvidíme druhý meteor? Třetí, ... (Předpokládáme, že jednotlivé meteory jsou navzájem nezávislé.)