5. cvičení z PSt — 19. 3. 2026

Poznávačka náhodných veličin

1. Pravděpodobnost, že do našeho serveru pronikne hacker je během každého dne 0.01, nezávisle pro každý den. Označme T počet dnů do prvního průniku. Jaké je rozdělení T, $\mathbb{E}(T)$, $\mathrm{var}(T)$? Jaká je pravděpodobnost, že server zůstane bezpečný po celý rok?

2. Každý test programu může skončit buď nalezením chyby (úspěch) nebo ne (neúspěch). Předpokládáme, že pravděpodobnost nalezení chyby při jednom testu je 0.05 a vývojář provede 20 nezávislých testů, označíme X počet nalezených chyb. Jaké je rozdělení X, $\mathbb{E}(X)$, $\mathrm{var}(X)$? Jaká je pravděpodobnost, že nalezne právě tři chyby?

3. Historická data ukazují, že náš server obdrží průměrně 30 žádostí za minutu. Použijte Poissonovo rozdělení k určení pravděpodobnosti, že server obdrží přesně 40 žádostí v následující minutě. Jaký je rozptyl tohoto rozdělení?

Název	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ($\mathrm{Im}\,X$)	Střední hodnota	Rozptyl
Bernoulliho $\mathrm{Ber}(p)$	$p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p	$p(1-p)$
Binomické $\mathrm{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np	$np(1-p)$
Geometrické $\mathrm{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1-p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
Poissonovo $\mathrm{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ	λ
Uniformní $\mathrm{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

Podmíněná střední hodnota

$$\mathbb{E}(X \mid B) = \sum_{x \in Im(X)} x \cdot P(X = x \mid B)$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i P(B_i) \cdot \mathbb{E}(X \mid B_i) \qquad B_1, B_2, \dots \text{ je rozklad } \Omega$$

4. V kvízu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou $-1/4$ bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností q jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

(a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

(b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

(c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

5. Můj počítač občas zlobí: každý den s pravděpodobností p zamrzne. Když se to stane dva dny po sobě, začnu to řešit. Jaký je střední počet dnů, než se to stane?

6. V televizní soutěži si účastník může vybrat dvě otázky. U otázky A odhaduje, že správně odpoví s pravděpodobností 0.8 (a dostane za to 1 000 Kč). U otázky B je jeho pravděpodobnost úspěchu jen 0.5, zato za správnou odpověď dostane 2 000 Kč. Po špatné odpovědi hra končí, po správné může zkusit druhou otázku (a odměna za už správně odpovězenou otázku mu při špatně odpovězené další nepropadne).

(a) Jaká je střední hodnota výhry, pokud začne otázkou A?

(b) Co když začne otázkou B?

(c*) Bonus: pokud jsou pravděpodobností úspěchu p_A, p_B a odměny m_A, m_B, jak se má soutěžící rozhodnout?

(d*) A co když těch otázek bude víc než dvě?

Rozptyl

- **Definice** $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$ **Věta** $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$
- **Věta** $\mathrm{var}(aX + b) = a^2 \,\mathrm{var}(X)$ **Věta** $\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y)$ (pokud $X \perp Y$)
- odvozené veličiny: směrodatná odchylka $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$
- variační koeficient $CV_X = \sigma_X / \mathbb{E}(X)$ (pokud $\mathbb{E}(X) > 0$)

7. Spočtete přímo z definice rozptyl $\mathrm{Uni}(a, b)$ – stačí pro $a = -2$, $b = 2$. Srovnejte s tabulkou na minulé straně.

8. Buď $X \sim \mathrm{Geo}(0.1)$ a $Y \sim \mathrm{Geo}(0.01)$. Zvolte konstantu c tak, aby veličiny X a $Z = cY$ měly stejnou střední hodnotu. Porovnejte rozptyl, směrodatnou odchylku a variační koeficient pro X, Y, Z.

9. Dokažte, že $\mathrm{var}(X + b) = \mathrm{var}(X)$.

Náhodné vektory

Sdružená pravděpodobnostní funkce je definována vztahem $p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \,\&\, Y = y)$. „Jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y se v tomto kontextu nazývají marginální pravděpodobnostní funkce. Připomeňte si, jak je zjistit z $p_{X,Y}$.

10. Označme X, Y výsledky dvou nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly 1, ..., 4).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_1 = \max(X, Y)$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_2 = X + Y$?

(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny $Z_3 = XY$? *(Hint dole)*[1]

11. (a) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_2)$ nebo $\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Spočtěte obojí podle definice.

(b) V předchozím příkladu: je větší $\mathbb{E}(Z_3)$ nebo $\mathbb{E}(X^2)$? Spočtěte obojí podle definice.

12. Nezávislé n.v. X_1, ..., X_n mají geometrické rozdělení s parametry p_1, ..., p_n. Jaké je rozdělení n.v. $M = \min(X_1, \ldots, X_n)$?

K procvičení

13. Házíme běžnou kostkou, při šestce házíme znovu, i opakovaně. Součet všech hozených čísel označme X. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.

14. V tabulce je sdružená pravděpodobnostní funkce náhodných veličin X, Y. Jiné než vyznačené hodnoty tyto veličiny nenabývají.

x \ y	0	1	2
0	1/4	1/6	1/12
1	1/6	1/4	1/12

(a) Najděte marginální rozdělení X i Y. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$.

(b) Jsou X a Y nezávislé? Neboli: platí $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$?

(c) Popište rozdělení $X + Y$ – tj. nalezněte pravděpodobnostní funkci n.v. $X+Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(X+Y)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$.

(d) Popište rozdělení $X \cdot Y$. Spočtěte odsud $\mathbb{E}(XY)$ – ověřte, zda se to rovná $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

[1] Jakých hodnot nabývá vektor (X, Y), pokud $\max(X, Y) = k$? Resp. v dalších částech, pokud $X + Y = k$, resp. $XY = k$?