

4. cvičení z PSt — 12. 3. 2026

Základní zacházení s $\mathbb{E}$

Diskrétní náhodná veličina v $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, jehož obraz $\text{Im}(X)$ (množina hodnot, které nabývá) je nejvýše spočetná, a $\{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$ pro všechny $x \in \mathbb{R}$.

Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny X lze vyjádřit následovně:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \cdot P(X = x), \quad \mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) \cdot X(\omega).$$

1. Nahoře jsou dva vzorečky pro střední hodnotu z přednášky. Co každý z nich předpokládá o X , případně o pravděpodobnostním prostoru? Je některý z nich „obecnější“?
2. Po hodu kostkou dostaneme za šestku 10 korun, za pětku 7 korun, za ostatní zaplatíme 5 korun. Jaká je střední hodnota výhry?
3. Máme neomezený počet černých a červených ponožek. Ponožky vytahujeme poslepu, obě barvy jsou stejně pravděpodobné. Kolik ponožek vytáhneme, než budeme mít dvě stejné barvy?
4. Nové kasino nabízí následující hru: vsadím x korun, s pravděpodobností $1/2$ o ně přijdu, ale s pravděpodobností $1/2$ vyhraju $2x$ (navíc k mým x korunám).
 - (a) Jaká je střední hodnota výhry?
 - (b) Začínám s k korunami, budu hrát n kol. V každém kole si můžu vybrat, jakou část svých peněz vsadím. Chci maximalizovat střední hodnotu peněz na konci: Jak to udělat a kolik ta střední hodnota je?
 - (c) Jaká je pravděpodobnost, že s takovou strategií přijdu o všechny peníze?
 - (d*) Jakou strategií byste zvolili?

Linearita $\mathbb{E}$

$$\mathbb{E}(a_1 X_1 + \dots + a_n X_n) = a_1 \mathbb{E}(X_1) + \dots + a_n \mathbb{E}(X_n)$$

5. Hodíme n -krát korunou, která má pravděpodobnost, že padne Panna, rovnou p .
 - (a) Označme X počet po sobě jdoucích hodů PO. (Např. pokud $n = 6$ a padlo postupně POOPOO, tak $X = 2$.) Určete $\mathbb{E}(X)$.
 - (b) Rozmyslete si, proč se nejedná o binomické rozdělení.
 - (c) Označme teď Y počet opakování hodů POP, jaká je $\mathbb{E}(Y)$?
6. Hodíme $\binom{n}{2}$ -krát korunou z minulého příkladu. Přitom tvoříme graf s vrcholy $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Postupně pro všechny dvojice $\{i, j\} \in \binom{V}{2}$ určíme, jestli jsou spojené hranou – to bude tehdy, když příslušným hodem padla Panna. Vzniklému grafu se říká náhodný graf $G(n, p)$. Označme X počet hran v tom grafu a T počet trojúhelníků.
 - (a) Určete $\mathbb{E}(X)$, případně i rozdělení X .
 - (b) Určete $\mathbb{E}(T)$.
7. Připomeňte si definici indikátorové náhodné veličiny I_A .
 - (a) Jaká je $\mathbb{E}(I_A)$?
 - (b) Necht $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Ověřte rovnost

$$1 - I_A = \prod_{i=1}^n (1 - I_{A_i}).$$

(c*) Roznásobte a použijte větu o linearitě střední hodnoty. Dostanete princip inkluze a exkluze, který znáte z diskrétní matematiky.

Bonus

8. Ke každému nákupu dostaneme jako dárek autíčko – náhodně vybrané z n typů. Kolik průměrně musíme udělat nákupů, než dostaneme všechny typy autíček?

K procvičení

9. Král Ludvík chce mít mužského potomka, aby ho mohl opět pojmenovat Ludvík. V každém roce mu jeho manželka porodí právě jedno dítě, které je stejně pravděpodobně chlapec i děvče, nezávisle na předchozích pokusech. Všechny narozené děti přežijí. Pokud se narodí chlapec, tak další potomky už Ludvík mít nebude. Označme S počet narozených synů a D počet narozených dcer.

(a) Určete $\mathbb{E}(S)$.

(b) Určete $\mathbb{E}(D)$.

10. Předpokládejme, že vyřešení jednoho příkladu trvá X minut, kde $X = 1, 2, \dots$, nebo 5. Doba trvání je náhodná a pravděpodobnostní funkce je $p_X(1) = p_X(2) = 0.1$, $p_X(3) = p_X(4) = 0.2$, $p_X(5) = 0.4$. Spočtěte $\mathbb{E}(X)$.