

3. cvičení z PSt — 5. 3. 2026

Nezávislé jevy

Buď I libovolná množina indexů. Jevy $\{A_i; i \in I\}$ nazveme *nezávislé (independent)*, pokud pro každou konečnou množinu $J \subseteq I$

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Pokud podmínka platí jen pro dvouprvkové množiny J , nazýváme jevy $\{A_i; i \in I\}$ *po dvou nezávislé (pairwise independent)*.

- Pokud jsou jevy A, B nezávislé, tak jsou nezávislé i jevy A, B^c . A také jevy A^c, B^c (kde $A^c = \Omega \setminus A$).
- Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň disjunktní?
 - Mohou být jevy A, B nezávislé a zároveň $A \subseteq B$?
- Najděte jevy A, B, C (na libovolném pravděpodobnostním prostoru), které
 - jsou nezávislé.
 - nejsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.
 - jsou po dvou nezávislé, ale $P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$.

Náhodné veličiny

- Náhodná veličina* je přiřazení reálného čísla každému výsledku náhodného experimentu, neboli je to zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Náhodná veličina je *diskrétní*, pokud se nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot.
 - Pro náhodnou veličinu X definujeme *pravděpodobnostní funkci* $p_X(x) := P(X = x)$.
- Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.
 - Jaká je $P(X > k)$? Zkuste napřed pro $k = 1, k = 2$.
 - Jaká je $P(X = k)$? Určení těchto čísel se nazývá popis rozdělení (= distribuce) X .
 - Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?
 - 5*.** Pokračování: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete distribuci Y .
 - Quido také hází míčem na koš, má pravděpodobnost p , že se trefí a také jsou hody nezávislé. Označme Z počet zásahů z n pokusů. Určete distribuci Z (tj. $P(Z = k)$ pro všechna k).
 - Hodíme dvěma kostkami – pro jednoduchost čtyřstěnnými, s čísly $1, \dots, 4$. Označíme X maximum ze dvou hozených čísel. Popište, jak budete tuto situaci modelovat: co bude Ω , co přesně za matematický objekt je X , jaká je p_X .

Název	Značení	Pravděpodobnostní funkce	Rozsah ($\text{Im}(X)$)	Střední hodnota
Bernoulliho	$X \sim \text{Ber}(p)$	$p_X(1) = p, p_X(0) = 1 - p$	$\{0, 1\}$	p
Binomické	$X \sim \text{Bin}(n, p)$	$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	$\{0, 1, \dots, n\}$	np
Geometrické	$X \sim \text{Geo}(p)$	$p_X(k) = (1 - p)^{k-1} p$	$\{1, 2, \dots\}$	$1/p$
Poissonovo	$X \sim \text{Poi}(\lambda)$	$p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\{0, 1, \dots\}$	λ
Uniformní	$X \sim \text{Uni}(a, b)$	$p_X(k) = \frac{1}{b-a+1}$	$\{a, a+1, \dots, b\}$	$\frac{a+b}{2}$
Hypergeometrické	$X \sim \text{Hyp}(N, K, n)$	$p_X(k) =$	$\{0, 1, 2, \dots, \min(n, K)\}$	$n \frac{K}{N}$

8. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře.

(a) Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.

(b) Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).

V obou případech zkoumáme, kolikátým pokusem dveře otevřeme. Jaké je rozdělení této náhodné veličiny, tj., jaká je pravděpodobnost, že dveře otevřeme k -tým pokusem. Jaká je její střední hodnota? (Použijte tabulku.)

(c) Jako část (a), ale správné jsou dva klíče z deseti.

(d) Jako část (b), ale správné jsou dva klíče z deseti. (Zde je určení střední hodnoty trochu těžší, stačí když určíte pravděpodobnostní funkci.)

9. Na přednášku je přihlášeno 234 lidí. Jaká je pravděpodobnost, že přesně jeden z nich má dnes narozeniny? Ignorujte přestupné roky, uvažujte, že všechny dny jsou stejně pravděpodobné pro narození.

(a) Použijte binomické rozdělení.

(b) Použijte aproximaci pomocí Poissonova rozdělení: $\text{Bin}(n, \lambda/n)$ je přibližně $\text{Poi}(\lambda)$.

(c) Co se změní, když budu uvažovat narozeniny zítra?

10. V pytlíku je N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme n z nich, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X ?

(b) Jaká je $P(X = k)$?

(c) Určete $\mathbb{E}(X)$ – pomocí tabulky. Pro $n = 1$ si rozmyslete, že je to jasné.

Bonus

11. Najdete náhodné jevy A, B, C takové, že

- A, B jsou nezávislé za podmínky C , tj. $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$,
- A, B jsou nezávislé za podmínky C^c ,
- ale A, B nejsou nezávislé?

12. (Kasino v St. Petersburgu) Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n -tém hodů, dostaneme odměnu 2^n . Kolik byste byli ochotni zaplatit za účast v této hře?

K procvičení

13. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla. Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli „dvouorlovou“ minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

14. Na chorobu C máme dva testy, A a B . Test A má sensitivitu i specifitu $p = 0.95$. Test B vždy řekne, že pacient je zdravý. Předpokládejte, že $P(C) = 0.01$.

(a) Spočtete pro oba testy pravděpodobnost úspěchu (tj. správné odpovědi), použijeme-li je na náhodného pacienta. Rozmyslete si, co to říká o užitečnosti obou testů.

(b) Pro jaké p je pravděpodobnost úspěchu obou testů stejná?

15. Kouřovými signály přenášíme binární soubor. Je proto poměrně vysoká pravděpodobnost chyby u každého bitu: 0 se jako 0 přenesení jen s pravděpodobností 0.9, 1 jako 1 jen s pravděpodobností 0.8. Předpokládejme (trochu neseriózně), že jednotlivé znaky se přenáší nezávisle. Dále předpokládejme, že ve vysílané zprávě je stejně nul a jedniček.

(a) Pokud jsme dostali signál 0, jaká je pravděpodobnost, že byl opravdu vyslán?

(b) Dostali jsme zprávu 0010. Jaká je pravděpodobnost, že byla opravdu vyslána?

(c) Jak se výpočet změní, pokud budeme pro kontrolu vysílat každý symbol třikrát (a pak vezmeme častější z těch tří pokusů)?

16. Necht náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení, $X \sim \text{Poi}(\lambda)$. Připomeňte si vzorec pro pravděpodobnostní funkci $p_X(k)$. Ukažte, že $p_X(k)$ je rostoucí pro $k \leq \lfloor \lambda \rfloor$ a pak klesá, v limitě k nule.